Tutorium 2 (29.10.26)

LEITUNGSWIDERSTAND

Aufgabe 1:

Auf einem Schiebewiderstand ist Konstantandraht mit der Länge $l = 300\,\mathrm{m}$ und mit einem Durchmesser von $d = 0{,}4\,\mathrm{mm}$ gewickelt. Der spezifische Widerstand von Konstantan beträgt $\varrho = 0{,}5\,\Omega \cdot \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$.
Wie groß ist der Widerstand R der Wicklung?

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho l}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{0{,}5\,\Omega\,\frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \cdot 300\,\mathrm{m}}{\pi \cdot \frac{0{,}4^2\,\mathrm{mm}^2}{4}} = 1193{,}66\,\Omega$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Aufgabe 2:

a) Wie groß ist der Widerstand eines Kupferdrahtes R_{Cu} mit der Länge $l = 10\,\mathrm{m}$ und dem Durchmesser $d = 1\,\mathrm{mm}$? Die Leitfähigkeit des Kupfers beträgt $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 58\,\mathrm{m}/\Omega \cdot \mathrm{mm}^2$.
b) Wie groß wird der Widerstand R_{Al}, wenn der Kupferdraht durch Aluminiumdraht gleicher Länge und Stärke ersetzt wird? Die Leitfähigkeit des Aluminiums beträgt $\gamma_{\mathrm{Al}} = 36\,\mathrm{m}/\Omega \cdot \mathrm{mm}^2$.
c) Welcher Querschnitt A_{Al} müsste bei Aluminium gewählt werden, um bei gleicher Länge den Widerstand des Kupfers nicht zu überschreiten?

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\kappa}}$$

a)
$$R_{Cu} = \frac{1}{\kappa_{Cu}} \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa_{Cu}} \frac{l}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1}{58\,\frac{\mathrm{m}}{\Omega\,\mathrm{mm}^2}} \cdot \frac{10\,\mathrm{m}}{\pi \cdot \frac{1^2\,\mathrm{mm}^2}{4}} = 0{,}2195\,\Omega$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

b)
$$R_{Al} = \frac{1}{\kappa_{Al}} \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa_{Al}} \frac{l}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1}{36\,\frac{\mathrm{m}}{\Omega\,\mathrm{mm}^2}} \cdot \frac{10\,\mathrm{m}}{\pi \cdot \frac{1^2\,\mathrm{mm}^2}{4}} = 0{,}3537\,\Omega$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

c)
$$R_{Cu} = \frac{1}{\kappa_{Al}} \frac{l}{A_{Al}} \Rightarrow A_{Al} = \frac{l}{\kappa_{Al} R_{Cu}} = \frac{10\,\mathrm{m}}{\frac{36\,\mathrm{m}}{\Omega\,\mathrm{mm}^2} \cdot 0{,}2195\,\Omega} = 1{,}2655\,\mathrm{mm}^2$$

Made with Goodnotes

Aufgabe 3:

$\ell_{Cu} = \ell_{Al} = \ell$

In welchem Verhältnis müssen die Durchmesser von Kupferdraht d_{Cu} und Aluminiumdraht d_{Al} gleicher Länge und Temperatur stehen, damit sie den gleichen Widerstand haben? Wie verhalten sich unter diesen Bedingungen ihre Massen zueinander?

Material	Leitfähigkeit	Dichte
Aluminium	$\gamma_{Al} = 35{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$	$\varrho_{Al} = 2{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$
Kupfer	$\gamma_{Cu} = 57 \cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$	$\varrho_{Cu} = 8{,}9\,\mathrm{g/cm^3}$

a) Verhältnis der Durchmesser bei gleichem Widerstand:

$$R_{Cu} = R_{Al}$$

$$\frac{1}{\kappa_{Cu}} \frac{\ell}{\frac{\pi d_{Cu}^2}{4}} = \frac{1}{\kappa_{Al}} \frac{\ell}{\frac{\pi d_{Al}^2}{4}}$$

$$\frac{d_{Cu}}{d_{Al}} = \sqrt{\frac{\kappa_{Al}}{\kappa_{Cu}}} = \sqrt{\frac{35{,}9 \cdot 10^6\ \frac{S}{m}}{57 \cdot 10^6\ \frac{S}{m}}} = 0{,}79$$

b) Verhältnis der Masse:

$$\text{Dichte } \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{A\ell} = \frac{m}{\frac{\pi d^2}{4}\ell} \Rightarrow \boxed{m = \frac{\rho \pi d^2 \ell}{4}}$$

$$\frac{m_{Cu}}{m_{Al}} = \frac{\rho_{Cu} \pi d_{Cu}^2 \ell}{\rho_{Al} \pi d_{Al}^2 \ell} = \frac{\rho_{Cu}\, d_{Cu}^2}{\rho_{Al}\, d_{Al}^2} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}} \cdot \left(\frac{d_{Cu}}{d_{Al}}\right)^2 = \frac{8{,}9\ g/cm^3}{2{,}7\ g/cm^3} \cdot (0{,}79)^2$$

$$= 2{,}06$$

Made with Goodnotes

TEMPERATURABHÄNGIGKEIT

Aufgabe 1: $P_=$ $U_=$

Eine Glühlampe mit den Angaben $40\,\mathrm{W}/230\,\mathrm{V}$ hat einen einfach gewendelten Wolframglühdraht (Länge $l = 657\,\mathrm{mm}$, Durchmesser $d = 0{,}0226\,\mathrm{mm}$, $\varrho_{20} = 0{,}055\,\Omega \cdot \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$, $\alpha_{20} = 4{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$, $\beta_{20} = 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-2}$).

a) Berechnen Sie R_{20} und R_ϑ (Umgebungstemperatur $20\,^\circ\mathrm{C}$), sowie die Glühtemperatur ϑ.

b) Wie groß sind der Einschaltstrom I_{20}

a) Bei Umgebungstemperatur 20°C:

$$R_{20} = \frac{\rho_{20}\, l}{A} = \frac{\rho_{20}\, l}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{0{,}055\ \Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m} \cdot 0{,}657\ \mathrm{m}}{\frac{\pi\,(0{,}0226)^2\ \mathrm{mm}^2}{4}} = 90{,}08\ \Omega$$

Bei Glühtemperatur ϑ (Lampe angeschaltet)

$$R_\vartheta = \frac{U^2}{P} = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{40\,\mathrm{W}} = 1322{,}5\ \Omega$$

Glühtemperatur $T = ?$

$$R_\vartheta = R_{20}\left(1 + \alpha_{20}\,\Delta T + \beta_{20}\,\Delta T^2\right)$$

$$1322{,}5\ \Omega = 90{,}08\ \Omega \left(1 + 4{,}1 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}}\,\Delta T + 1 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}^2}\,\Delta T^2\right)$$

$$\frac{1322{,}5\ \Omega}{90{,}8\ \Omega} - 1 = 4{,}1\ 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{K}}\,\Delta T + 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{K}^2}\,\Delta T^2$$

Wende die pq Formel an.

! $\Delta T\,(\text{in K}) = \Delta T\,(\text{in }^\circ\text{C})$
$T\,(\text{in K}) \neq T\,(\text{in }^\circ\text{C})$

$\Delta T = 2178{,}771\ \mathrm{K}$ oder $-6278{,}771\ \mathrm{K}$ (↯)

z.B. $0\,^\circ\mathrm{C} = 273{,}15\ \mathrm{K}$ und $100\,^\circ\mathrm{C} = 373{,}15\ \mathrm{K}$

$\Delta T = 100\,^\circ\mathrm{C} - 0\,^\circ\mathrm{C} = 100\,^\circ\mathrm{C}$

$\Delta T = 373{,}15\ \mathrm{K} - 273{,}15\ \mathrm{K} = 100\ \mathrm{K}$

$\therefore \Delta T = 2178{,}771\ \mathrm{K} = 2178{,}771\,^\circ\mathrm{C}$!

$T_{\text{Glüh}} = T_{20} + \Delta T = 2178{,}771\,^\circ\mathrm{C} + 20\,^\circ\mathrm{C} = 2198{,}771\,^\circ\mathrm{C}$

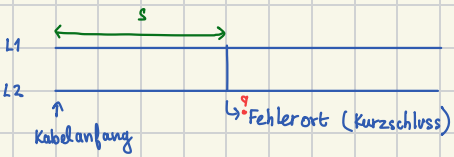
b) $I_{20} = \frac{U}{R_{20}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{90{,}08\,\Omega} = 2{,}55\,\mathrm{A}$

Made with Goodnotes

Aufgabe 2:

Zwei Adern mit einem Durchmesser von $d = 0{,}9\,\mathrm{mm}$ eines im Erdreich liegenden Fernsprechkabels zeigen Kurzschluss gegeneinander. Zur Fehlerortbestimmung misst man am Kabelanfang zwischen ihnen einen Widerstand von $R = 13{,}1\,\Omega$. An welcher Stelle s muss aufgegraben werden, wenn $20\,^\circ\mathrm{C}$ im Erdreich angenommen werden ($\varrho_{20} = 0{,}0178\,\Omega \cdot \mathrm{mm^2/m}$, $\alpha_{20} = 3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}$)?
Um welche Strecke Δs liegt der Fehlerort vom vermeintlichen entfernt, wenn

a) die mittlere Temperatur im Erdreich $12\,^\circ\mathrm{C}$ beträgt?



$T_{Umgebung} = 20°C$

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{\rho \cdot 2s}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad (l = 2s) \quad \Rightarrow s = \frac{\pi d^2 R}{8\rho} = \frac{\pi \cdot 0{,}9^2\,\mathrm{mm^2} \cdot 13{,}1\,\Omega}{8 \cdot 0{,}0178\,\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm^2}}{\mathrm{m}}} = 234{,}1\,\mathrm{m}$$

$T_{Erdreich} = 12°C$

ΔT (in K) = ΔT (in °C)

$12°C - 20°C = -8°C = -8\,K$

$$R_{12°C} = R_{20°C}\left(1 + \alpha_{20°C}\,\Delta T\right)$$

$$R_{12°C} = 13{,}1\,\Omega\left(1 + 3{,}9 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{K} \cdot (-8\,K)\right) = 12{,}69\,\Omega$$

$$s' = \frac{\pi d^2 R_{12°C}}{8\rho} = \frac{\pi \cdot 0{,}9^2\,\mathrm{mm^2} \cdot 12{,}69\,\Omega}{8 \cdot 0{,}0178\,\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm^2}}{\mathrm{m}}} = 226{,}77\,\mathrm{m}$$

Abstand zum Fehlerort

$$\Delta s = s - s' = 234{,}1\,\mathrm{m} - 226{,}77\,\mathrm{m} = 7{,}3\,\mathrm{m}$$

Made with Goodnotes

Aufgabe 3:

Zwei Widerstände R_1 und R_2 sind wie in Abb. 1 dargestellt verschaltet. Bei 20°C haben die Widerstände die Werte R_1 = 10 kΩ und R_2 = 40 kΩ. Der Temperaturkoeffizient von R_1 beträgt $\alpha_1 = +4 \cdot 10^{-3}/°C$.

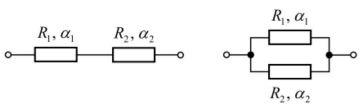


Abbildung 1: Reihen- und Parallelschaltung temperaturabhängiger Widerstände

a) Wie groß muss der Temperaturkoeffizient von R_2 sein, damit die Reihenschaltung temperaturunabhängig wird?

b) Wie groß muss der Temperaturkoeffizient von R_2 sein, damit die Parallelschaltung temperaturunabhängig wird?

a) Reihenschaltung: $R_{ges} = R_1 + R_2 = R_{\vartheta_1} + R_{\vartheta_2} = 40\,k\Omega + 10\,k\Omega = 50\,k\Omega$

$$R_\vartheta = R_{20°C}\left(1 + \alpha_{20°C}\,\Delta T\right)$$

$$R_{ges} = R_1\left(1+\alpha_1\Delta T\right) + R_2\left(1+\alpha_2\Delta T\right)$$
$$R_{ges} - R_1\left(1+\alpha_1\Delta T\right) = R_2\left(1+\alpha_2\Delta T\right)$$
$$R_{ges} - R_1 - R_1\alpha_1\Delta T = R_2\left(1+\alpha_2\Delta T\right)$$
$$R_2 - R_1\alpha_1\Delta T = R_2 + R_2\alpha_2\Delta T$$

$$\alpha_2 = \frac{-R_1\alpha_1\Delta T}{R_2\,\Delta T} = -\frac{10\,k\Omega \cdot 4\cdot 10^{-3}\,1/°C}{40\cdot 10^{3}\,\Omega} = -10^{-3}\,\frac{1}{°C}$$

b) Parallelschaltung: $R_{ges} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_{\vartheta_1}\cdot R_{\vartheta_2}}{R_{\vartheta_1} + R_{\vartheta_2}}$

$$R_{ges} = \frac{R_1\left(1+\alpha_1\Delta T\right)\cdot R_2\left(1+\alpha_2\Delta T\right)}{R_1\left(1+\alpha_1\Delta T\right) + R_2\left(1+\alpha_2\Delta T\right)}$$

$$= \frac{R_1 R_2\left(1 + \alpha_2\Delta T + \alpha_1\Delta T + \alpha_1\alpha_2\,\Delta T^2\right)}{R_1\left(1+\alpha_1\Delta T\right) + R_2\left(1+\alpha_2\Delta T\right)}$$

ΔT^2 ist nicht linear (Parabolisches Verhalten). Deswegen ist ein zweiter Temperaturkoeffizient β benötigt.

Made with Goodnotes

Made with Goodnotes